Une petite théorie des pavages à l'usage des profs de lycée

en vert : ce qui doit être retravaillé...

Objectifs :
- pouvoir justifier rigoureusement ce dont les élèves ont besoin pour faire les exercices (types de tâches)
- donner au prof un cadre solide de raisonnement : pour l'aider à ne pas dire de connerie, être capable de réfléchir rapidement à la véracité de ce qu'il affirme, mais qui reste à la portée des élèves Même si les raisonnements sont souvent trop difficiles pour les élèves, les notions utilisées restent élémentaires : pas de théorie des groupes notamment.
- ne pas faire une théorie générale des pavages : c'est bien trop redoutable pour rester compatible avec les deux objectifs précédents ! Mais éventuellement avoir conscience de ce qui pourrait aller un peu au-delà du cours tout en restant pas trop difficile.
- avoir une présentation qui tienne compte de la situation d'enseignement au lycée : par exemple on peut définir un pavage de pleins de façons, plus ou moins équivalentes. Le choix ici de se focaliser d'emblée sur les pavages réguliers et de les présenter de cette façon qui est assez originale vient de l'observation pendant au moins deux ou trois ans des difficultés des élèves, notamment à exhiber des translations laissant un pavage donné invariant. En mettant tout de suite l'accent sur cette difficulté, la définition pourra peut-être aider les élèves. Donc il y a une volonté forte de faire de la transposition didactique)

Les idées développées ici proviennent souvent de :
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/docmaths/pavages/pavage_intro.htm
Ces pages web ont l'avantage de proposer des définitions qui sont accessibles aux lycéens (pas de groupes ni de quotients).
Par contre, il n'y a pas forcément d'analyse poussée des difficultés intrinsèques de telle ou telle question concernant les pavages. Et les choix qui ont été faits ne sont pas forcément expliqués très clairement (par exemple : ils préfèrent « ensemble minimal » à « pavé minimal »… pourquoi ?)

***

Liste de définitions :

a faire : donner des équivalents « structuralistes » des définitions : par exemple une maille à translater est le résultat du quotient du plan par le sous-groupe des translations…

ces équivalents struct ne sont pas là pour les élèves mais pour les profs ; et aussi pour vérifier la validité de la mini-théorie qui est proposée ici...

« Définition » : ce qu'on appelle le *plan* est un prolongement du plan de travail (de la feuille) aussi loin que l'on veut, dans toutes les directions.

Définition : une t*ransformation isométrique* est une symétrie, une rotation, une translation ou une composée de ces trois types de transformations.

(les élèves ne sont pas habitués à ce que c'est qu'une composée…)
(il n'y a même plus au programme les symétries glissées… mais on nous demande quand même de parler de pavage, et donc de l'ensemble des transformations laissant invariante une figure donnée !)
(ici, « isométrie » signifie « isométrie affine »)

Définition : une transformation laisse une figure *invariante* si l'image de cette figure est elle-même (c'est à dire qu'elle reste globalement la même après avoir subi la transformation, même si les points qui la composent sont éventuellement permutés)

Définition : une *frise* est une figure qui vérifie :
- elle est invariante par une translation
- il existe un vecteur u (qualifié de« minimal ») pour lequel : si v est le vecteur d'une translation laissant invariante la frise, alors il existe un **entier** k tel que v=ku

(on ne fait pas de distinction entre : bande, dessin, frise, décor…)
(par contre on donne une définition réellement mathématique et pas un truc pour enfant du type « c'est la répétition d'un motif à l'infini »)
(la deuxième condition est là pour des raisons pratiques d'étude de la frise, mais est aussi là pour éviter de considérer par exemple une droite comme une frise)
(il faut préciser à chaque fois si on considère les couleurs comme étant ou pas des éléments à prendre en compte dans l'invariance par translation.)

Définition : un *pavage périodique* est une figure qui vérifie :
- il existe deux translations, de vecteurs non colinéaires, par lesquelles elle est invariante
- il existe des vecteurs u et v (qualifiés de « vecteurs de base ») pour lesquels : si w est le vecteur d'une translation laissant invariant le pavage, alors il existe des **entiers** k et k' tels que w=ku+k'v

(c'est l'occasion de mentionner qu'il y a une notion plus générale : le pavage tout court et qu'il y a donc des pavages non périodiques. Et c'est beau et important de montrer par exemple un pavage de Penrose.)
(les définitions dans les manuels définissent en général un pavage de façon générale, puis n'étudient que des pavages périodiques, sans le dire, et même sans montrer un seul pavage qui soit non périodique !)
(on utilise dans cette définition la notion de réseau sans le dire)
(un pavage non périodique et une partition du plan en pavés isométriques mais pour laquelle le réseau de base (u,v) mentionné ici n'existe pas)
(on ne distingue pas le cas où il y a un seul pavé de celui où il y a un nombre fini de pavés)
(cette définition ne correspond pas à celle souvent donnée, dans laquelle on impose une condition de « discrétion » pour éviter par exemple que le pavage contienne une infinité de pavés de taille arbitrairement petite, mais ce n'est pas très grave si on considère ces pavages comme « pathologiques » ; le fait de ne pas mentionner cette nuance aux élèves est moins grave que de ne pas mentionner l'existence des pavages non-périodiques !)
(terminologie : un pavage périodique est en fait « bi-périodique » tandis qu'un frise est une sorte de pavage « mono-périodique »)

Définition : soit une frise (resp. un pavage périodique) de vecteur minimal u (resp. de vecteurs de base u et v) ; une *maille à translater* est une figure du plan telle que si on considère tous ses translatés par les vecteurs ku, k entier relatif quelconque (resp. les vecteurs ku+k'v, k et k' entiers relatifs quelconques), alors ces translatés recouvrent toute la frise (resp. tout le pavage) et ne se recouvrent jamais les uns les autres.

(on ne mentionne pas que les intersections sur les bords ne sont pas forcément non vides, *etc*.)
(on utilise la notion de partition sans le dire)
(au lieu de dire « recouvre toute la frise », il faudrait plutôt dire « recouvre toute la bande du plan dans laquelle se trouve la frise » mais comme on n'a pas distingué la frise du décor on ne sait pas trop si la frise est la figure ou la figure + son « fond »… cela ne pose sans doute pas de problème dans le concret des tâches demandées aux élèves)

(la frontière d'un ensemble translaté de base ne suit pas forcément les lignes de la frise ou du pavage étudié mais il est possible et souvent plus clair de choisir le translaté de base de façon adaptée au dessin de la frise ou du pavage étudié : en déformant les bords du parallélogramme pour qu'ils suivent les lignes de la figure tout en restant une maille du réseau)

Définition : soit une frise (resp. un pavage) et toutes les transformations isométriques qui la laissent invariante. Un *motif élémentaire* de la frise (resp. du pavage) est une partie de la frise (resp. du pavage) telle que si on considère toutes les images de cette partie par les isométries laissant la frise (resp. le pavage) invariante, ces images ne se recouvrent pas et recouvrent le plan tout entier (resp. la frise toute entière).

(donc une maille à translater est constituée de un ou plusieurs motifs élémentaires isométriques entre eux)

***

Les définitions précédentes sont pensées de telle manière qu'elle « miment » les définitions usuellement données en théorie de pavages, en restant accessibles aux élèves mais en même temps en restant rigoureuses.
Elles permettent aussi au professeur d'avoir conscience de ce qui est passé sous silence.
Enfin, elles sont censées être opérationnelles d'un point de vue didactique c'est à dire permettre de présenter simplement les méthodes ci-dessous, de les justifier et de permettre au prof et aux élèves d'avoir conscience des principaux obstacles conceptuels.

Par exemple en distinguant maille à translater et motif élémentaire, on met en évidence le rôle des translations et on suggère un moyen de trouver un motif élémentaire en commençant par isoler une maille à translater avant d'en rechercher les centres et axes de symétrie.

A FAIRE : vérifier que ces méthodes peuvent être justifiées en utilisant les définitions précédentes

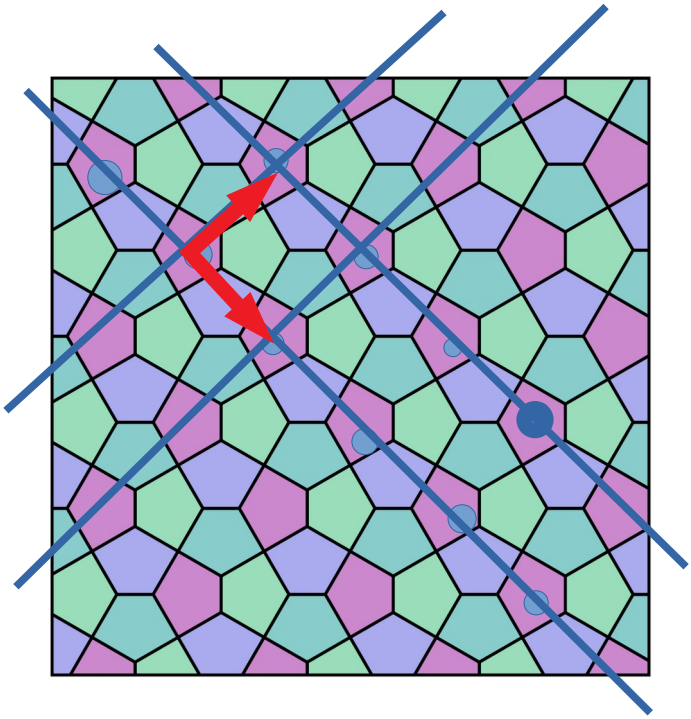
Liste de types de tâche avec pour chacun une méthode pour le résoudre :

Tous ces types de tâches ne sont pas forcément au programme à l'heure actuelle mais ont été plus ou moins au programme dans les années récentes. En tous les cas on en voit parler dans des manuels ou sur le net.
Il y a aussi des explications pour le prof (et les élèves) concernant les bonnes réponses multiples possibles (quand il peut y avoir plusieurs bonnes réponses).
Il y a enfin des tentatives pour repérer le niveau de difficulté intrinsèque du type de tâche et donc s'attendre aux difficultés qu'auront les élèves si on leur donne ce genre d'exercice.

Inventer un pavage : on invente une maille à translater (en forme de parallélogramme dont les bords sont plus ou moins déformés) et on obtient le pavage par des translations répétées dans deux directions différentes, parallèles aux bords du parallélogramme.

Trouver un vecteur minimal (resp. deux vecteurs de base) ou trouver une maille à translater :
(une frise ou un pavage périodique étant donné)
Choisir un point remarquable (par exemple l'œil d'un animal si la frise ou le pavage figure des animaux) et repérer tous les points similaires dans la frise (resp. le pavage) (tous les yeux des animaux translatés). Si on s'y prend bien, on obtient une sorte de droite graduée régulièrement (resp. un réseau à maille en parallélogramme).
Ensuite c'est facile !

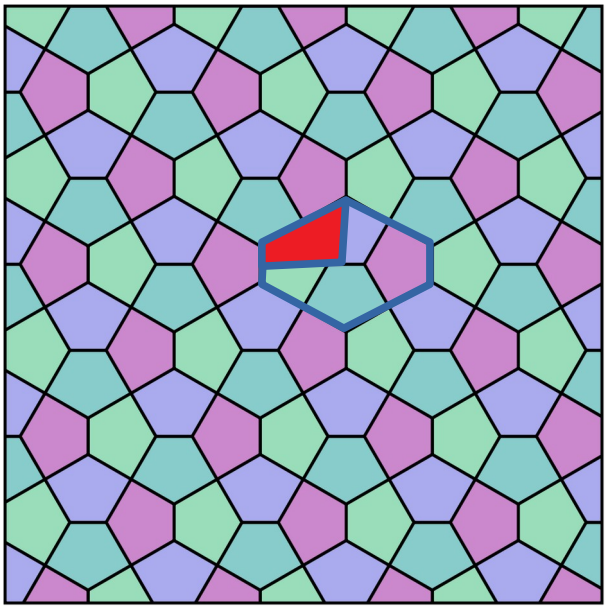
Voici un schéma explicatif : les points ronds sont les « points remarquables » choisis.

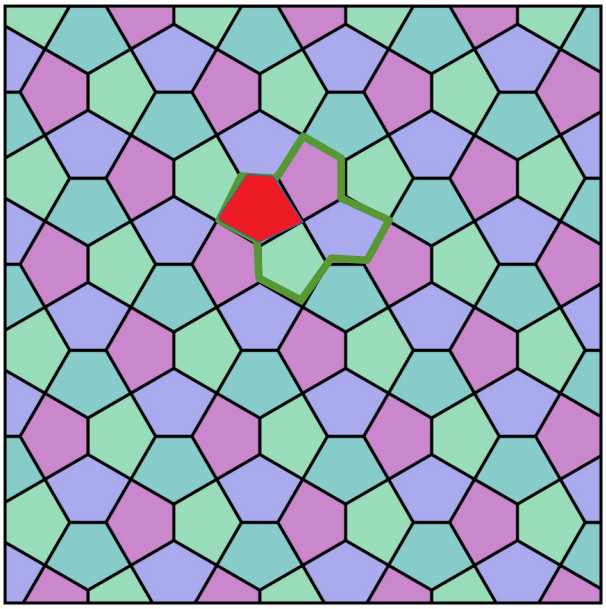


Remarque : il y a pleins d'autres bonnes réponses possibles… car lorsqu'on dessine les droites il y a plusieurs choix possibles. Par contre, le réseau de points est unique.

Trouver un motif élémentaire (une frise ou un pavage périodique étant donné). (Ce type de tâche est difficile car suivant la maille à translater que l'on choisit on peut rencontrer plus ou moins de difficulté...)
- rechercher une maille à translater.
- si elle a un axe de symétrie, la restreindre à sa « moitié » puis recommencer
- si elle est invariante par rotation, la restreindre à une de ses « parties », recommencer éventuellement
- lorsqu'on ne peut plus continuer, c'est que le motif est élémentaire.

Remarque : il peut bien sûr y avoir plusieurs motifs élémentaires différents. Certains peuvent suivre les lignes de la figure de départ (en vert ci-dessous), d'autres non (en bleu)…





Trouver les isométries laissant le pavage invariant : c'est intrinsèquement très difficile. Même si on peut trouver un sous-ensemble qui engendre le groupe des isométries invariantes, il reste à étudier toutes leurs compositions…
Ce qu'on peut faire, c'est demander *quelques* isométries laissant le pavage invariant.
On peut aussi faire remarquer la difficulté à étudier une composée de deux transformations ?
Faire remarquer que parfois une composée donne une transformation simple (par exemple deux symétries d'axes non parallèles donnent une rotation) mais qu'il y a aussi les symétries glissées et que surtout la composition n'est pas commutative !
Pour repérer les transformations invariantes, on peut trouver des transformations transformant une partie du pavage en une autre partie, mais cela ne prouve pas que l'ensemble du pavage est concerné !
Le seul truc simple, si on se lance là-dedans, c'est de donner le pavage en calque à superposer au pavage imprimé sur papier puis de faire tourner le calque, ou plier / retourner.

Un pavage et un motif élémentaire (ou pas élémentaire, d'ailleurs) étant donné, lister les isométries permettant de reconstruire le pavage à partir de l'ensemble initial.
- identifier une maille à translater contenant le motif donné
- lister les isométries permettant d'obtenir la maille à partir du motif
- ensuite c'est facile

remarque 1 : il y a à priori plusieurs bonnes réponses (pleins !)
remarque 2 : en aucun cas ces isométries ne forment le groupe des isométries laissant le pavage invariant (elles l'engendrent seulement)

***

Pour finir, deux problèmes ouverts :
- étant donné un pentagone, comment savoir si on peut paver le plan avec (de façon périodique) ?
(peut-être ce pb a-t-il été résolu en 2017, mais en tous les cas son histoire est romantique : voir ici http://images.math.cnrs.fr/L-enigme-des-pentagones.html)

- existe-t-il un pavage apériodique du plan n'utilisant qu'un seul type de pavé ? (lu dans un pdf en ligne, mais je ne retrouve plus la source)

***

Pour finir en beauté, un extrait du programme de première actuel (les frises et pavages ne sont plus du tout mentionnés en terminale ce qui laisse présager que les profs ne les traiteront plus en première puisqu'ils ne servent à rien ensuite… sauf s'il y a des questions dans les E3C… sauf si les E3C disparaissent…)

****

Figures régulières :
- exemples de polygones réguliers ;
- exemples de frises ou de pavages.

Capacités attendues
- Analyser et construire des polygones réguliers à l'aide d'un motif élémentaire et de transformations du plan.
- Calculer des distances, des angles, des aires et des périmètres associés aux polygones réguliers.
- Créer une figure à partir d'un motif élémentaire par répétition d'une ou de deux transformations simples.
- Analyser (? c'est à dire ?) une frise ou pavage et en rechercher un motif élémentaire (?? motif = motif ou maille ?).

Commentaires
- Selon les cas, le motif élémentaire d'une frise ou d'un pavage peut être pris sous la forme d'un triangle rectangle ou isocèle, d'un parallélogramme ou d'un rectangle (??? à quoi sert cette remarque ? Pourquoi pas un chameau ?).
- La classification des types de frises ou de pavages n'est pas un attendu du programme. (???? cette remarque sous-entend peut-être qu'en lisant ce qui précède, les enseignants ne sauront pas trop quoi faire ?)
- Dans le cadre de raccordements faisant intervenir un arc de cercle, on exploite la notion géométrique de tangente à un cercle. (????? bonne idée, mais j'aimerais voir un exemple de pavage concerné...)

****
L'essentiel de l'ancien programme de première sur les frises : en gros un copié-collé, sauf qu'on disait « maille » au lieu de « motif »...
- Créer une figure par répétition d'une ou de deux transformations simples.
- Analyser une frise et en rechercher une maille élémentaire.
Selon les cas, la maille élémentaire peut être prise sous la forme d'un triangle rectangle ou isocèle, ou d'un rectangle.
La classification des types de frises n'est pas un attendu du programme.

****
L'essentiel de l'ancien programme de terminale : encore un copié collé ! (A part une variation intéressante sur les puces des listes à puce.)
● Créer une figure par répétition de deux transformations simples.
● Rechercher sur des exemples simples des éléments de symétrie et des translations laissant le pavage invariant.
Selon les cas, une maille élémentaire peut être prise sous la forme d'un triangle rectangle ou isocèle, d'un parallélogramme ou d'un rectangle.

La classification des types de pavages est hors programme.